5ο μάθημα
30/3/20

[2ο (κανονικό) εξ' αποστάσεως...]

Απαλοίφουσα
• Bezout •

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m$, $b_m \neq 0$

$$R(f, g; x) = \begin{vmatrix} \overbrace{a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n}^{(n+1)} & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^{(m-1)\ \text{μηδενικά}} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & a_0 & a_1 & \dots & & & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & & 0 \\ \vdots & & b_0 & \dots & & & & & b_m \end{vmatrix}$$

η μεταβλητή που θα διώξω (x)

$(n+m) \times (n+m)$

ΠΑΡΑΔ: $x = 3t^2 - t + 1$

$$y = \frac{t}{t^2+1}$$

Τα κάνω πολυώνυμα ως προς t:

- $3t^2 - t + 1 - x = 0$
- $(t^2+1)y = t \iff t^2y + y - t = 0 \iff yt^2 - t + y = 0$

Άρα έχω τις εξ/ις:

$f = 1 - x - t + 3t^2 = 0$ και

$g = y - t + yt^2 = 0$

$$R(f,g;t) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 3 \\ y & -1 & y & 0 \\ 0 & y & -1 & y \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\cdot\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 3 \\ -1 & y & 0 \\ y & -1 & y \end{vmatrix} + y\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1-x & -1 & 3 \\ y & -1 & y \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\cdot[(1-x)y^2 + 3 - 3y^2 - y] + y\cdot(y + 9y - 3(1-x)y - 3)$$

$$= (1-x)\cdot(y^2 - xy^2 + 3 - 3y^2 - y) + y\cdot(10y - 3y + 3xy - 3)$$

$$= y^2 - xy^2 + 3 - 3y^2 - y - xy^2 + x^2y^2 - 3x + 3xy^2 + xy + 7y^2 + 3xy^2 - 3y = 5y^2 + 4xy^2 + 3 - 4y + x^2y^2 - 3x + xy$$

$\phi(x,y)$

άρα $V(5y^2 + 4xy^2 + 3 - 4y + x^2y^2 - 3x + xy)$ ρητή

για εξάσκηση

HW: $x = \dfrac{3t^2 + t - 2}{t}$, $y = \dfrac{t^3-1}{2t+1}$

Να τα κάνουμε πολ/μα ως προς t και απαλείψουμε t κ' να βρούμε την ορίζουσα

$\to 1\cdot a = a\cdot 1 = a$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\to ab = ba$

Δακτύλιοι Πολ/μων [Σημειώσεις : PMA]

• **ΟΡΙΣΜΟΣ** (από δομές...): Ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται ακέραια περιοχή αν δεν έχει διαιρέτες του μηδενός

$\to$ αν $a \neq 0$ κ. $\exists b \in D$ με $b \neq 0$ τ.ω. $a \cdot b = 0$

π.χ. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}$ σώμα (ακεραίων περιοχών)

αλλοί: $\mathbb{Z}_6$: $\underbrace{[2]_6}_{\neq 0} \cdot \underbrace{[3]_6}_{\neq 0} = [0]$ ΟΧΙ ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΕΡΙΟΧΗ

ή $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{12}$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Πολ/μο $f(x)$ είναι ένα πεπερασμένο τυπικό άθροισμα της μορφής $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ ($a_i \in D$ = ακέραια περιοχή)

μεταβλητή $\quad$ a_i συντελεστές

Το σύνολο όλων των πολ/μων με συντελεστές από το D το συμβολίζουμε με $D[x]$ κ. ονομάζεται δακτύλιος πολ/μων

Σε αντίθεση με τις σειρές το πολ/μο κάποια στιγμή σταματάει δεν πάει επ' άπειρον

Βαθμός πολ/μου

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in D[x]$.
Αν για κάποιο $i \geq 0$ $\exists a_i \neq 0$ τότε η μεγαλύτερη τέτοια τιμή του i ονομάζεται **βαθμός** του πολ/μου. Αν $\nexists$ τέτοιο i τότε λέμε ότι το πολ/μο $f(x)$ έχει βαθμό μηδέν.

ΠΑΡΑΔ.: $f(x) = 3 + 7x^2 + 5x^3 - 11x^7 \in \mathbb{Z}[x]$

$$\deg f(x) = 7$$

$$g(x) = 3 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + \dots$$

$$\deg g(x) = 0$$

$$h(x) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \dots$$

$$\deg h(x) = 0$$

[Αλλού βλέπουμε ότι: $\deg 0 = \begin{cases} 0 \checkmark \\ \text{δεν έχει βαθμό} \\ -\infty \end{cases}$]

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

• Λέμε ότι $f(x) = g(x)$ αν $a_i = b_i \ \forall i$

• $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_i + b_i)x^i + (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_m + b_m)x^m$

• $f(x)\cdot g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_1)x + (a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2)x^2 + \sum_{i+j=s} a_i b_j x^s + \dots + a_n b_m x^{n+m}$

• $\deg(f\cdot g) = \deg f + \deg g$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ ΠΡΟΣΟΧΗ!
Αν $f = 0$: $-\infty = -\infty + 15$
(αν θεωρήσαμε ότι $\deg 0 = -\infty$)

• $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$
π.χ. $f + (-f)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν D ακεραία περιοχή τότε κ. $D[x]$ είναι ακεραία περιοχή.

$$(D[x], +, \cdot)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$-f(x) = -a_0 - a_1 x - \dots - a_n x^n$$

Με βάση αυτό το θεώρημα,

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ ακεραίες περιοχές

→ $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \dots, \mathbb{Z}_7[x]$ ακεραίες περιοχές

→ $\mathbb{Z}[x,y], \mathbb{R}[x,y], \mathbb{R}[x,y,z], \mathbb{C}[x,y], \mathbb{C}[x,y,z]$ ακεραίες περιοχές

→ $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ... ακεραία περιοχή

(μπορώ να το συνεχίσω μέχρι επ' άπειρον)

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω D ακεραία περιοχή κ. $a, b \in D$. Αν $\exists \gamma \in D$ τ.ω. $b = a\gamma$ τότε λέμε ότι το a διαιρεί το b ή το a είναι παράγοντας του b ή το b είναι πολλ/σιο του a

Ιδιότητες διαιρετότητας:

1). Αν $a | b$ κ. $b | \gamma \Rightarrow a | \gamma$ (αντίστοιχη της θεωρίας αριθμών)

2). Αν $a | b$ κ. $a | \gamma \Rightarrow a | rb + s\gamma$, $r, s \in D$

3). $a | 0$ $\forall a \in D$ αφού $0 = 0 \cdot a$

4). Αν $b = a\gamma$ κ. $b \neq 0 \Rightarrow \gamma$ μοναδικό

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένα στοιχείο $a \in D$ λέγεται μονάδα αν έχει πολλ/στικό αντίστροφο

$\mathbb{K}$ σώμα, κάθε στοιχείο $a \neq 0$ είναι μονάδα

ΒΙΒΛΙΟ: Πουλάκη

Π.χ. $\mathbb{Z}$: $\{1,-1\}$ μονάδες

$\mathbb{Z}[x]$: $\{1,-1\}$ μονάδες

$\Downarrow$

Οι μονάδες του $D[x]$ είναι μονάδες του D

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Δύο στοιχεία $a, b \in D$ λέγονται ισοδύναμα αν $a = bu$, όπου u μονάδα

$a \sim b$ αν $\exists\, u$ μονάδα

$a \sim a$: $a = 1 \cdot a$

$a \sim b$: $a = bu$; $b = au^{-1}$. $b \sim a$

ΠΑΡΑΔ.: $\mathbb{R}$: $3 \in \mathbb{R}$ $a \sim 3$

$a = 3u$

$2 = 3 \cdot \boxed{\frac{2}{3}}$

$\pi = 3 \cdot \boxed{\frac{\pi}{3}}$

$\sqrt{2020} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2020}}{3}$

$\mathbb{Z}$: $a \sim 6$, $a = 6u$ $\{6, -6\}$

u μονάδα

$\in [1,-1]$

$[0]$, $\{1,-1\}$, $\{2,-2\}$, $\{3,-3\}$, $\{n,-n\}$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένα μη μηδενικό στοιχείο p του D που δεν είναι μονάδα της ακεραίας περιοχής D λέγεται ανάγωγο αν σε κάθε ανάλυση του $p = ab$ το a είναι μονάδα ή το b είναι μονάδα

ΠΑΡΑΔ : $\mathbb{R}$: $\nexists$ αναίρωγο

(σε οποιοδήποτε σώμα ισχύει αυτό)

$\mathbb{Z}$: $6 = 2 \cdot 3$ (αφού μονάδες στο $\mathbb{Z}$ είναι το 1 κ. -1) όχι ανάγωγο

$-3 = (-1) \cdot 3 = 1 \cdot (-3)$ ανάγωγο

$= 3 \cdot (-1) = (-3) \cdot 1$

$\mathbb{R}[x]$: x^2+1 ανάγωγο

ΑΠΟΔ. : Έστω $x^2+1 = f(x) \cdot g(x)$

Θ.α.ο. $f(x)$ ή $g(x)$ μονάδα

$\deg(x^2+1) = \deg(f \cdot g)$, $f \neq 0$, $g \neq 0$

$\Rightarrow 2 = \deg f + \deg g$

Περιπτώσεις :

i) $\deg f = 2$, $\deg g = 0$:

$x^2+1 = f(x) \cdot g(x)$, όπου $g(x) = b_0$

$= f(x) \cdot b_0$ ($b_0 = 0$ ή $\neq 0$ Lάτοπο όμως ...) , $b_0 \neq 0$

$\mathbb{R}$ σώμα $\xRightarrow{b_0 \neq 0}$ b_0 μονάδα

άρα $g(x)$ μονάδα ■

iii) $\deg f = 0$, $\deg g = 2$:

$\deg f = 0 \Rightarrow f = f_0$

άρα $x^2+1 = f_0 \, g(x)$, $f_0 \neq 0$

ii) $\deg f(x) = 1$, $\deg g(x) = 1$

$\deg f(x) = 1 = \deg g(x)$

$\Rightarrow f(x) = a_0 + a_1 x$, $g(x) = b_0 + b_1 x$

$a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$

άρα $x^2+1 = (a_0 + a_1 x)(b_0 + b_1 x)$

$\xrightarrow{x = -\frac{a_0}{a_1}} \left(-\frac{a_0}{a_1}\right)^2 + 1 = \underbrace{\left(a_0 + a_1\left(-\frac{a_0}{a_1}\right)\right)}_{=0}\left(b_0 + b_1\left(-\frac{a_0}{a_1}\right)\right)$

$\Rightarrow 1 \leq \left(-\frac{a_0}{a_1}\right)^2 + 1 = 0$

ΑΤΟΠΟ

Άρα το x^2+1 στον $\mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο ▪

<u>Παρατήρηση</u>: Το x^2+1 στο $\mathbb{C}[x]$ δεν είναι ανάγωγο

<u>ΑΠΟΔ.</u>: $x^2+1 = (x-i)(x+i)$

Ερώτηση: Ποια είναι τα ανάγωγα στο $\mathbb{C}[x]$?

$\Rightarrow$ Όλα τα πολ/μα του βαθμού κ. μόνο αυτά, $f(x) = a_0 + a_1 x$, $a_1 \neq 0$

<u>ΑΠΟΔ.</u>: Θ.ν.α.ο. $f(x)$ ανάγωγο

i) $f(x) \neq 0$, αφού $a_1 \neq 0$

ii) Μονάδες του $\mathbb{C}[x]$ είναι οι μονάδες του $\mathbb{C}$

iii) $a_0 + a_1 x = g(x)h(x)$

$\deg(a_0+a_1x) = \deg(g \cdot h) = \deg g + \deg h$

• $\deg g = 1$ κ. $\deg h = 0 \Rightarrow h \neq 0$, h σταθ.

$\Leftrightarrow h \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow h$ μονάδα

• $\deg g = 0$ κ. $\deg h = 1 \Rightarrow g$ μονάδα

Απέδειξα ότι όλα τα στοιχεία του $\mathbb{C}[x]$ της μορφής $f(x) = a_0 + a_1 x$, με $a_1 \neq 0$, είναι ανάγωγα. Θα πρέπει ν.α.ο. είναι μόνο αυτά:

Έστω $g(x)$ έχει βαθμό $0 \Rightarrow g(x) = b_0$

$\Rightarrow b_0 = 0$ ή $b_0 \neq 0 \Rightarrow b_0$ μονάδα

Έστω $g(x)$ έχει βαθμό $n \geq 2$

$$\underbrace{g(x)}_{n=2} = \underbrace{(x-\rho)}_{1}\underbrace{h(x)}_{n-1\geq 1}$$

$x-p$ δεν είναι μονάδα

$h(x)$ — " —

Άρα $g(x)$ ανάγωγο ■

HW

Ερώτηση: Ποια τα ανάγωγα στοιχεία του $\mathbb{R}[x]$?

Σίγουρα 1βάθμια κ. 2βάθμια.

Τα 3βάθμια ?